Teoria ergodyczna
WPPT IIIr. semestr zimowy 2008/9
KOLOKWIUM 1

10/12/08

We wszystkich zadaniach mamy do czynienia z układem (X, μ, T), gdzie μ jest miarą probabilistyczną, a T transformacją zachowującą miarę, nie koniecznie odwracalną. T_A, μ_A zawsze oznacza transformację indukowaną i miarę warunkową unormowaną na podzbiorze A. Litera f zawsze oznacza mierzalną funkcję rzeczywistą na X.

Zadanie 2. Niech $A \subset X$ ma miarę różną od 0 i 1. Udowodnij, że jeśli układ (X, μ, T) jest ergodyczny, to transformacja indukowana (A, T_A, μ_A) również.

ROZWIĄZANIE: Z ergodyczności, drapacz S_A nad A jest całą przestrzenią X. Załóżmy, że $B \subset A$ jest istotnym podzbiorem A, T_A-niezmienniczym. Rozważmy drapacz chmur S_B nad B (to też powinno być całe X). Rozważmy punkt x z $A \setminus B$. Niech $0 = n_0, n_1, n_2, \ldots$ oznacza kolejne nieujemne chwile powrotów x do A. Gdyby wpadał on do B, to robiłby to po raz pierwszy w chwili n_i $(i > 0)$, a wtedy punkt $y = T^{n_{i-1}}(x)$ spełniałby $y \in A$, $y \notin B$ oraz $T_A(y) \in B$. Czyli $y \in T_A^{-1}(B) \setminus B$. Z T_A-niezmienniczości zbioru B, zbiór takich y-ów ma miarę zero. Z tego wynika, że rów nież zbiór punktów $x \in A \setminus B$ które kiedykolwiek wpadają do B ma miarę zero. Oznacza to, że $A \setminus B$ jest (z dokładnością do miary) rozłączny z S_B. Zatem S_B jest zbiorem niezmienniczym o mierze ściśle pomiędzy 0 a 1. Sprzeczność z ergodycznością.

Zadanie 3. Udowodnij, że jeśli miara μ jest ergodyczna i bezatomowa, to dla każdego $N \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór A taki, że drapacz chmur nad A ma w najniższym miejscu co najmniej N pięter.

ROZWIĄZANIE: To jest oczywiste np. z Tw. Rochlina (choć nie korzystamy z pełnej mocy tego twierdzenia): weźmy dowolny zbiór A dla którego N kolejnych przeciwobrazów jest rozłącznych. Wtedy pierwsze N pięter drapacza chmur nad A to pełne przeciwobrazy $T^{-n}(A)$ i mają one tę samą miarę. Dopiero powyżej numeru N-tego piętra mogą się zacząć zmniejszać.

Zadanie 6. Wykaż, że funkcja f podniezmiennicza (czyli taka, że $f \circ T \leq f$) jest niezmiennicza.

ROZWIĄZANIE: Najpierw niech f będzie podniezmiennicza i na dodatek całkowalna. Wtedy f spełnia prawie wszędzie nierówność

$$f(T(x)) \leq f(x). \tag{*}$$

Ponieważ, z niezmienniczości miary

$$\int f(T(x))d\mu(x) = \int f(x)d(T\mu)(x) = \int f(x)d\mu(x),$$

zatem zbiór na którym nierówność (*) jest ostra ma miarę zero.

Jeśli f jest niecałkowalna, to rozważmy $f_M = max\{-M,\ min\{f, M\}\}$ (f obcięta z dołu przez $-M$ i z góry przez M). To jest funkcja ograniczona, więc całkowalna. Pokażemy, że jest też podniezmiennicza: Jeśli $f_M(T(x)) = -M$ to oczywiście jest to nie więcej niż $f_M(x)$. Jeśli $f_M(T(x)) = M$ to znaczy, że $f(T(x)) \geq M$, zatem z podniezmienniczości f, $f(x) \geq f(T(x)) \geq M$ a co za tym idzie $f_M(x) = M$ i mamy $f_M(T(x)) = f_M(x)$. W pozostałych przypadkach $-M < f_M(T(x)) = f(T(x)) \leq f(x)$. Zatem $f(x) > -M$ co oznacza, że $f_M(x) = f(x)$ lub M. Jeśli $f_M(x) = f(x)$ to mamy $f_M(T(x)) \leq f(x) = f_M(x)$, a jeśli $f_M(x) = M$ to korzystamy z faktu, że $f_M(T(x)) \leq M = f_M(x)$.
Z poprzedniego punktu f_M jest funkcją niezmienniczą. Ponieważ tak jest dla każdego $M > 0$ wnioskujemy, że cała f jest niezmiennicza.

Zadanie 10. Na zespolonym okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$ z unormowaną miarą łukową λ rozważmy dwie transformacje: $T_1(z) = z_0 z$ i $T_2(z) = z_0^2 z$ ($z_0 \in \mathbb{T}$). Czy układ $(\mathbb{T}, \lambda, T_1)$ jest faktorem układu $(\mathbb{T}, \lambda, T_2)$, czy na odwrót, czy w obie strony?

ROZWIĄZANIE: Rozważmy odwzorowanie faktorujące $\phi(z) = z^2$ (wiemy że zachowuje ono miarę Lebesgue'a). Wtedy

$$\phi \circ T_1(z) = z_0^2 z^2 = T_2 \circ \phi(z).$$

Zatem T_2 jest faktorem T_1.
Zbadanie faktoryzacji odwrotnej jest znacznie trudniejsze i w zasadzie nie oczekiwałem, że ktoś to zrobi. Funkcja tożsamościowa $f(z) = z$ ma jest dla T_1 funkcją własną o wartości własnej z_0: $f(T_1(x)) = z_0 f(z)$. Gdyby istniała faktoryzacja ψ przeprowadzająca T_2 na T_1, to funkcja $g = f \circ \psi$ spełniałaby

$$g(T_2(x)) = f(\psi \circ T_2(x)) = f(T_1(\psi x)) = z_0 f(\psi x) = z_0 g(x),$$

czyli g byłaby funkcją własną dla T_2 o watrości własnej z_0. Ponieważ każda mierzalna funkcja ograniczona (a taka jest f więc i g) należy do L^2, g rozwijałaby się w szereg Fouriera

$$g(z) = \sum_n c_n\ z^n,$$

gdzie n przebiega wszystkie liczby całkowite i jest to rozkład jednoznaczny (funkcje z^n są wzajemnie ortogonalne). Teraz, z jednej strony

$$g(T_2(z)) = g(z_0^2 z) = \sum_n c_n z_0^{2n}\ z^n,$$

z drugiej zaś

$$g(T_2(z)) = z_0 g(z) = \sum_n z_0 c_n\ z^n.$$

Z jednoznaczności rozkładu, dla każdego n mielibyśmy

$$z_0 c_n = z_0^{2n} c_n.$$

Albo $c_n = 0$, albo $z_0 = z_0^{2n}$, czyli $z_0^{2n-1} = 1$. Jeśli z_0 nie jest pierwiastkiem z jedności stopnia nieparzystego, to druga równość nigdy nie zachodzi, zatem $g \equiv 0$, co jest sprzeczne z definicją g (g ma wszędzie moduł 1). Jeśli z_0 spełnia $z_0 = z_0^{2n}$ dla pewnego n, to powyższa metoda nie wyklucza istnienia faktoryzacji. Ale w tym wypadku łatwo pokazać, że taka faktoryzacja jest możliwa. Trzeba tylko zauważyć, że możemy teraz wziąć $z_0' = z_0^2$ (wtedy ${z_0'}^n = z_0$) i zaadoptować pierwszą część zadania do obrotów o z_0' i ${z_0'}^n$ (odwzorowaniem faktorującym będzie teraz nie $\phi(z) = z^2$ tylko $\phi(z) = z^n$).